Analiza funkcjonalna
Lista 0

Zad 1. Niech $x, y \in \mathbb{R}^n$ i $p \geq 1$. Wykazać *nierówność Höldera* (1884):

$$\sum_{k=1}^{n} |x(k)y(k)| \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} |x(k)|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{i=1}^{n} |y(k)|^q\Big)^{\frac{1}{q}},$$

gdzie $q \geq 1$ jest takie, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ponadto sprawdzić, że w tej nierówności równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\exists_{\lambda \in \mathbb{R}} \, \forall_{k=1,\ldots,n} \quad |x(k)|^p = \lambda |y(k)|^q.$$

Zad 2. Wykazać, że $p \geq 1$ funkcja $\|x\|_p = (\sum_{k=1}^{n} |x(k)|^p)^{\frac{1}{p}}$ jest normą w $\mathbb{R}^n$.

Zad 3. Dla $x \in \mathbb{R}^n$ zbadać granicę $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p$ oraz sprawdzić, że funkcja $\|x\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} |x(k)|$ jest normą w $\mathbb{R}^n$.

Zad 4. Pokazać, że zbieżność w przestrzeni $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$, $p \in [1, \infty]$, równoważna jest zbieżności po współrzędnych.

Zad 5. Dowieść, że przestrzenie $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$, $p \in [1, \infty]$, są przestrzeniami Banacha.

Zad 6. Niech $A : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p) \to (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_q)$ będzie odwzorowaniem liniowym o macierzy $[a_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$. Wykazać, że norma operatora A

a) gdy $p = 1$ i $q = \infty$ wyraża się wzorem $\|A\| = \max_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} |a_{ij}|$,

b) gdy $p = q = \infty$ wyraża się wzorem $\|A\| = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$,

c) gdy $p = q = 2$ szacuje się nierównościami

$$\max_{i,j} |a_{ij}| \leq \|A\| \leq \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}.$$

Zad 7. Obliczyć normy następujących operatorów liniowych działających na płaszczyźnie euklidesowej $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$